I. Halmazok

A *halmaz* a matematika fontos fogalma. Ismételjük át azt, amit már tudunk róla! Egészítsük is ki az eddig tanultakat!

1. A halmazokról általában

A matematikában a halmazt *alapfogalomnak* tekintjük. Valamilyen szempontból összetartozó, egymással összekapcsolva, egyéb dolgoktól elkülönítve kezelt dolgok összessége alkot halmazt. A halmazt alkotó dolgok a halmaz *elemei*.

Az osztályunk tanulói, a megterített asztalon lévő tárgyak, a nullánál nagyobb egyjegyű páros számok, továbbá az összes egész számhalmazt alkotnak; ezeket így jelöljük:

$$H = \{\text{osztályunk tanulói}\},$$
$$J = \{\text{tányér, kés, villa, kanál, pohár, szalvéta}\},$$
$$K = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\},$$
$$L = \{\text{egész számok}\}.$$

Azt, hogy egy adott elem (például 4) eleme-e egy adott halmaznak (például a K halmaznak), így jelöljük: $4 \in K$. A $9 \notin K$ pedig azt jelenti, hogy a 9 nem eleme a K halmaznak.

A J halmaznak 6 eleme van, ezt úgy is mondhatjuk, hogy a J halmaz *számossága* 6.

A H, J és K halmazok véges számú elemből állnak, véges számosságúak. Az L halmaznak végtelen sok eleme van. Ennek a halmaznak a számossága végtelen. A végtelen mennyiség nem jellemezhető természetes számmal, ezért a végtelen számosságú halmazok elemeinek száma nem adható meg természetes számmal.

Egy halmazt akkor ismerünk, ha pontosan tudjuk, hogy mik az elemei.

Egy halmazt akkor adunk meg egyértelműen, ha bármely dologról eldönthető, hogy beletartozik-e a halmazba, vagy nem.

Halmazt megadhatunk elemeinek egy rájuk – és csak rájuk – jellemző tulajdonságával. Véges halmazt megadhatunk elemei felsorolásával is. A lényeg, hogy a halmaz megadása egyértelmű legyen!

Nézzünk néhány halmazt!

M = {1-nél nagyobb negatív számok}.

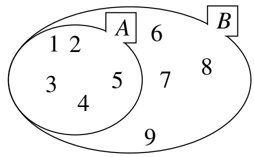
1-nél nagyobb negatív szám nincs, ezért az M halmaznak nincs egy eleme sem. Az M halmaz *üres halmaz*. Az üres halmazt így jelöljük: {} vagy: $\emptyset$.

$G = \{1; 3; 2; 5; 1; 2\}$, $F = \{1; 2; 3; 5\}$.

Két halmaz *egyenlő*, ha elemei megegyeznek. A felsorolt elemek sorrendje lehet különböző, és az azonos elemeket egy elemnek tekintjük. $G = F$.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

A két halmaz Venn-diagramon ábrázolva:



Az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme egyben a B halmaznak is eleme.

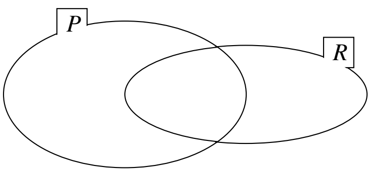
Ezt így jelöljük: $A \subset B$.

Fontos, hogy ezeket a jelöléseket bevezessük a szöveges megfogalmazás helyett, mert ez megkönnyíti a mukánkat. A halmazok egész tanulmányaink során végigkísérnek bennünket. Ezek a jelölések más témaköröknél is (függvények, logikai műveletek stb.) elő fognak fordulni.

Az üres halmazt minden halmaz részhalmazának tekintjük!

Ha az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, de nem egyenlő a B halmazzal, akkor *A valódi részhalmaza* a B halmaznak.

A halmazokkal műveleteket is végezhetünk!

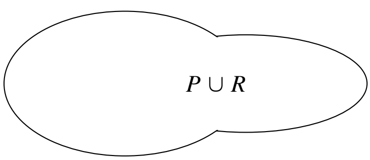


1. Egy osztályban kétféle nyelvet tanulnak tanórán kívüli formában: spanyolt és olaszt. Vannak olyan tanulók, akik mind a két nyelvet tanulják.

P = {spanyolt tanulók}, R = {olaszt tanulók}.

Egyesítsük a két halmazt!

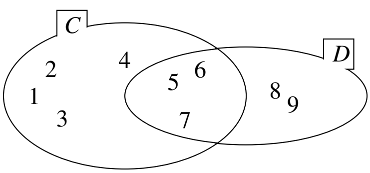
Két halmaz egyesítéséből kapott halmazba mindazok az elemek beletartoznak, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.



Két halmaz egyesítéséből kapott halmaz, másként a két halmaz *uniója:*

E = {tanórán kívül nyelvet tanulók}.

Ezt így jelöljük: $E = P \cup R$.



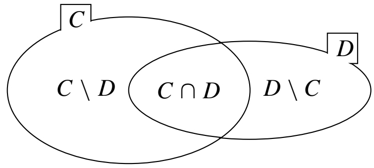
2. Legyen két halmaz:

$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $D = \{5; 6; 7; 8; 9\}$!

A C halmaz és a D halmaz közös elemei a két halmaz *közös részét, metszetét* alkotják.

Ezt így jelöljük: $C \cap D$. A két halmaz közös része is halmaz: $C \cap D = \{5; 6; 7\}$.

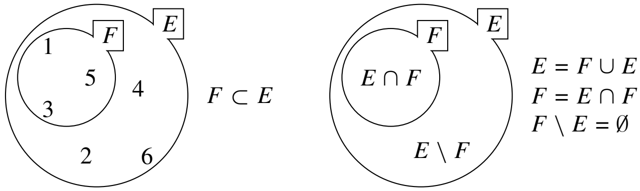
A C halmaznak azok az elemei, amelyek nem tartoznak a D halmazba, alkotják a C és D halmaz *különbségét*. Ezt így jelöljük: $C \setminus D$.



A D halmaznak azok az elemei, amelyek nem tartoznak a C halmazba, alkotják a D és C halmaz különbségét. Ezt így jelöljük: $D \setminus C$.

3. Nézzük a következő két halmazt! $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \}$, $F = \{1; 3; 5\}$.

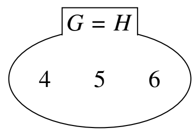
A F halmaz részhalmaza az E halmaznak: $F \subset E$. Ekkor a két halmaz közös része az F halmaz elemeiből áll. $E \cap F = F$.



Az E és F halmaz egyesítéséből kapott halmaz elemei megegyeznek az E halmaz elemeivel: $E \cup F = E$.

Ebben az esetben az $F \setminus E$ különbséghalmaznak nincs egy eleme sem, üres halmaz.

4. Legyen a $G = \{4; 5; 6\}$ és $H = \{4; 5; 6\}$, vagyis G és a H halmaz egyenlő: $G = H$.



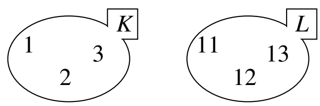
Ez esetben G minden eleme egyúttal H-nak is eleme, és H minden eleme G-nek is eleme: $G \subset H$, $H \subset G$.

A halmazok különbsége: $G \setminus H$ és $H \setminus G$ üres halmaz.

A két halmaz metszete: $G \cap H = G = H$.

A két halmaz uniója: $G \cup H = G = H$.

5. Legyen $K = \{1; 2; 3\}$ és $L = \{11; 12; 13\}$.



A K és az L két olyan nem üres halmaz, amelynek nincs közös eleme.

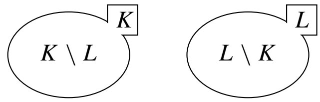
Ekkor a két halmaz metszete üres halmaz: $K \cap L = \emptyset$.

$K \cup L = \{1; 2; 3; 11; 12; 13\}$.

A két halmaz uniója tartalmazza mind a két halmaz elemeit (és csak azokat).

A két halmaz különbsége sem üres halmaz:

$K \setminus L = \{1; 2; 3\} = K$ és $L \setminus K = \{11; 12; 13\} = L$.



6. Nézzük a tízes számrendszer számjegyeinek halmazát!

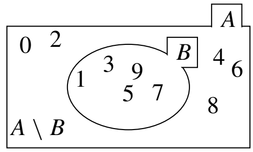
$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Ennek egy részhalmaza a páratlan számokat jelölő számjegyek halmaza:

$B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Az A halmaznak a B halmazba nem tartozó elemei A és B halmaz különbségét alkotják: $A \setminus B$.

7. Tekintsük az A halmazt *alaphalmaznak*, amely tartalmazza a tízes számrendszer összes számjegyét. Ez esetben azt mondjuk, hogy az $A \setminus B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ halmaz a B halmaz *kiegészítő (komplementer)* halmaza az A halmazra mint alaphalmazra nézve.

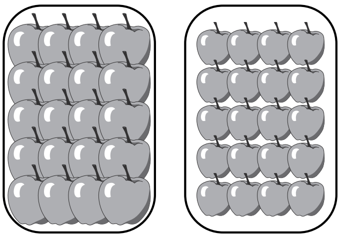


$A \setminus B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

Ennek jele: $\overline{B}$, vagy $\overline{B}_A$.

8. Halmaz közös elem nélküli halmazokra bontása

I. osztályú   II. osztályú



Almaszedés után méret alapján osztályozzák az almákat. Az almák halmaza közös elem nélküli halmaz. Elemei az egyes almák. Ezek azonban méretben, tömegükben eltérhetnek egymástól. Adott érték felett első osztályúnak, alatta másod-, esetleg harmadosztályúak. Osztályozáskor az almák halmazát kettő vagy több, közös elem nélküli halmazba sorolják.

Feladatok

1. Írjuk fel a következő halmazok elemeit (amennyiben lehetséges)!

A = {az első negyedév hónapjai}; B = {8-nál kisebb pozitív egész számok};
C = {2 pozitív többszörösei}; D = {egy adott szakasz pontjai};
E = {5-tel osztható pozitív egyjegyű számok} F = {a magyar irodalom legszebb versei};
G = {10-nél kisebb pozitív kétjegyű számok}.

2. Megadtuk a következő halmazokat elemeik felsorolásával. Keressünk olyan tulajdonságokat (ha van ilyen), amelyek segítségével szintén egyértelműen megadhatók!

$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; B = {a; á; e; é; i; í; o; ó; ö; ő; u; ú; ü; ű};
$C = \{3; 4; 11; 100; 395\}$; D = {hétfő; kedd; szerda; csütörtök; péntek};
E = {zöld; fiú; kréta; alma; tű}.

3. Adottak a következő halmazok.

$A = \{4; 5; 6; 7\}$; B = {3-mal osztható számok};
C = {derékszögű háromszögek, amelyeknek egyik szöge 100°-os};
D = {egy adott kocka csúcspontjai}; E = {3-nál kisebb pozitív egész számok};
F = {negatív számok}; G = {3-nál nagyobb, 8-nál kisebb egész számok};
$H = \{1; 2; 1; 2; 1; 2; 1\}$.

a) Hány eleme van az adott halmazoknak? *b)* Melyek üres halmazok?
c) Mely halmazoknak van végtelen sok eleme? *d)* Mely halmazok egyenlőek?

4. Készítsük el az adott halmazok Venn-diagramját!

a) A = {négyszögek}; B = {téglalapok}.

b) C = {20-nál kisebb pozitív páros számok};
D = {18-nál nem nagyobb, 3-mal osztható, pozitív számok}.

c) H = {osztályunk tanulói};
I = {osztályunk matematika fakultációra járó tanulói};

K = {osztályunk szemüveges tanulói}.

Kik tartoznak az I és K halmaz metszetébe?

Kik tartoznak az I és K halmaz egyesített halmazába (uniójába)?

Kik tartoznak az I és K halmaz különbséghalmazába?

Kik tartoznak a K és I halmaz különbséghalmazába?

Kik tartoznak az I halmaz kiegészítő halmazába a H halmazra mint alaphalmazra nézve?

Kik tartoznak a K halmaz kiegészítő halmazába a H halmazra mint alaphalmazra nézve?

Kik tartoznak az I és a K halmaz egyesítéséből kapott halmaz kiegészítő halmazába a H halmazra mint alaphalmazra nézve?

d) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár. Ábrázoljuk a bogarak és a rovarok halmazát Venn-diagramon!

e) Sok piros virág van. A rózsák közt sok a piros rózsa.

Ábrázoljuk Venn-diagramon a piros virágok halmazát, a rózsák halmazát és a piros rózsák halmazát! Írjuk be az ábrába, hogy hol helyezkednek el a sárga rózsák, és hol a hóvirágok!

f) Egy 30 fős osztályban (H) 18-an sportolnak rendszeresen (U). 10 tanuló (A) úszik, 12 tanuló (B) kosárlabdázik.

Hányan űzik mind a két sportot (M)?

Hányan úsznak, de nem kosárlabdáznak (C)?

Hányan kosárlabdáznak, de nem úsznak (D)?

Az A és B halmazok betűjelét használva írjuk fel, hogy kik tartoznak az U, M, C és D halmazba!

Kik tartoznak U kiegészítő halmazába a H halmazra mint alaphalmazra nézve?

Hány tanuló tartozik az $\overline{U}_H$ halmazba?

5. Egy városban 10 iskola működik. Az iskolákban általános iskolai, gimnáziumi oktatás és szakképzés folyik. 5 iskolában folyik általános iskolai, 4 iskolában gimnáziumi oktatás. 2 iskolában általános iskola és gimnázium működik. Hány iskolában folyik szakképzés?

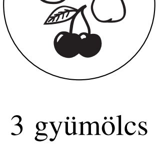
6. Egy házban 18-an járatnak újságot. 8-an Népszabadságot, 6-an Magyar Nemzetet, 2-en mind a kettőt. Hányan járatnak egyéb újságot?

2. Számhalmazok

A matematikában többnyire olyan halmazok fordulnak elő, amelyek elemei számok vagy pontok. A számhalmazok elemei számok.

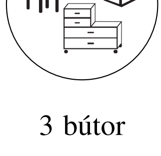
Milyen számhalmazokat ismertünk meg eddig?

Természetes számok

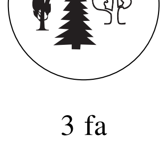


3 gyümölcs

3 írószer



3 bútor



3 fa

A *természetes számok* az ugyanannyi elemet tartalmazó halmazok elemeinek számát fejezik ki.

Természetes szám fejezi ki azt is, hogy a halmaznak egy eleme sincs.

A természetes számok: 0; 1; 2; 3; 4; ...

A természetes számok halmazát így jelöljük: $\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

Az **N** jelölés a latin naturális = természetes szóból származik.

A természetes számok közül akárhányat felsorolhatunk, mindig van olyan természetes szám, amely nincs köztük. A legnagyobb természetes számhoz egyet hozzáadva újabb számot kapunk.

A természetes számok halmaza végtelen sok elemből áll, *végtelen halmaz.*

Két természetes számról mindig el tudjuk dönteni, hogy egyenlőek-e, vagy ha nem, akkor azt, hogy melyik a nagyobb.

Ha a és b két természetes szám, akkor köztük az $a < b$, $a = b$, $a > b$ nagysági relációk közül pontosan egy áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a természetes számok nagyság szerint sorba rendezhetők.

A természetes számokkal műveleteket végezhetünk.

Két természetes szám összege is természetes szám, például: $3 + 5 = 8$.

Két természetes szám szorzata is természetes szám, például: $6 \cdot 3 = 18$.

Az összeadás és a szorzás művelete nem vezet ki a halmazból.

A természetes számok kivonására és osztására ez nem áll fenn. Két természetes szám különbsége vagy hányadosa nem minden esetben természetes szám.

Például: $5 - 4 = 1$, természetes szám; de a $4 - 5$ kivonás eredménye nem, illetve: $6 : 3 = 2$, természetes szám; de a $3 : 2$ osztás eredménye nem az.

A kivonás és az osztás nem mindig végezhető el a természetes számok halmazán. A két művelet kivezet a természetes számok halmazából.

Fontos *még megjegyezni, hogy*

– ha egy számhoz nullát adunk, vagy egy számból nullát vonunk ki, a művelet eredménye az eredeti szám: $a + 0 = a$; $a - 0 = a$,

– ha egy számot nullával szorzunk, a művelet eredménye nulla: $a \cdot 0 = 0$.

Egész számok

Láttuk, hogy a kivonás művelete kivezet a természetes számok halmazából. A természetes számok halmazát kibővítjük. Ezért értelmezzük a 0-nál 1-gyel, 2-vel, 3-mal, ... stb. kisebb számokat is mint a természetes számok ellentettjeit. Ezek a negatív egész számok.

A pozitív és negatív egész számok, valamint a nulla alkotják az egész számok halmazát.

Az egész számok halmazát **Z**-vel jelöljük: $\mathbf{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

Ezen a halmazon már a $4 - 5$ kivonás elvégezhető. $4 - 5 = -1$.

A számokat számegyenesen ábrázolhatjuk.

Először ki kell jelölni egy irányított egyenesen a 0 és az 1 helyét. Az így kapott egységszakasz segítségével egyértelműen meghatározhatjuk a többi szám helyét a számegyenesen. Vigyázzunk! Az egységszakasz hosszát tetszőlegesen választhatjuk meg, de ha már megválasztottuk, a további számok kijelöléséhez ezt a szakaszt kell egységnek tekinteni.

Az 1 és a -1 egyenlő távolságra vannak a nullától, ugyanígy a 2 és a -2 is. Egyenlő az abszolút értékük. $|1| = |-1|$, $|2| = |-2|$ stb.

Pozitív szám abszolút értéke maga a szám: $|a| = a$, ha $a > 0$,
nullának az abszolút értéke is nulla: $|a| = 0$, ha $a = 0$,
negatív szám abszolút értéke a szám ellentettjével egyezik meg: $|a| = -a$, ha $a < 0$.

Az egész számok összege, különbsége és szorzata is egész szám.

Az osztás művelete azonban nem mindig végezhető el az egész számok halmazán.

Például: a $9 : 4$ osztás eredménye nem egész szám.

Két, nem egyenlő egész számról mindig eldönthető, hogy melyik nagyobb.

Az egész számok halmaza is végtelen halmaz.

Racionális számok

Az osztás művelete kivezet az egész számok halmazából. Az osztást a szorzás segítségével értelmezzük.

$6 : 2$ vagy másként írva $\frac{6}{2}$ azt az egész számot jelenti, amellyel a 2-t megszorozva 6-ot kapunk eredményül.

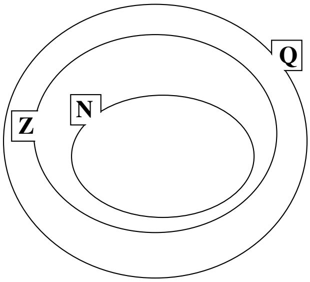
Ugyanígy a $9 : 4 = \frac{9}{4}$ azt a számot jelenti, amelyet 4-gyel szorozva 9-et kapunk eredményül.

A $\frac{9}{4}$ nem egész szám, de azért létezik. Értelmeztük a két szám hányadosaként felírható számokat:

Ha a és b tetszőleges egész számok (de $b \neq 0$), az $\frac{a}{b}$ alakban felírható számokat racionális számoknak nevezik.

A racionális számok halmazát **Q**-val jelöljük. Az elnevezés a latin quotiens (hányados) szóból származik.

Az egész számok is felírhatók két egész szám hányadosaként: $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$ egész számok.



Tehát az egész számok is racionális számok.

Az egész számok, ezen belül a természetes számok a racionális számok részhalmazát képezik.

Venn-diagramon ábrázoltuk a számhalmazok kapcsolatát:

Két racionális szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is racionális szám.

A 0*-val való osztásnak nincs értelme.*

Megjegyzés.

Nem tudunk ugyanis olyan számot találni, amelyre igaz lenne nullával való osztáskor az osztásnak a következő tulajdonsága: $8 : 2 = 4$ és $2 \cdot 4 = 8$.

Például: ha $5 : 0 = 5$, akkor $0 \cdot 5$ egyenlő kell legyen 5-tel, ami nem igaz: $0 \cdot 5 \neq 5$,
ha $5 : 0 = 0$, akkor $0 \cdot 0$ egyenlő kell legyen 5-tel, ami nem igaz: $0 \cdot 0 \neq 5$, továbbá
ha $0 : 0 = 0$, akkor $0 \cdot 0 = 0$. Ez igaz. A baj csak az, hogy bármely szám lenne ennek az osztásnak az eredménye, akkor is igaz állításhoz jutnánk ilyen módon:
$0 : 0 = 1$, akkor $0 \cdot 1 = 0$, vagy $0 : 0 = 2$, akkor $0 \cdot 2 = 0$, vagy $0 : 0 = 3$, akkor is igaz, hogy $0 \cdot 3 = 0$.
Tehát ez azt jelenti, hogy a megismert műveleti tulajdonságok ez esetben nem egyértelműek.

Fontos *még megjegyezni, hogy*

– ha a tört nevezője nulla, akkor a törtnek nincs értelme,

– a tört értéke csak akkor nulla, ha a számlálója nulla, és ugyanakkor a nevezője nem nulla,

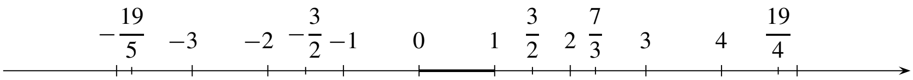
– a tört értéke nem nulla, ha a számlálója nem nulla (és természetesen ugyanakkor a nevezője sem nulla).

Két nem egyenlő racionális számról mindig eldönthető, hogy melyikük a nagyobb.

Az is igaz, hogy a racionális számok halmazának akárhány elemét felsoroljuk, mindig van olyan racionális szám, amely nem szerepelt a felsorolásban, tehát:

A racionális számok halmaza végtelen halmaz.

Ábrázoljunk racionális számokat a számegyenesen!



Minden esetben úgy jártunk el, hogy megkerestük az egységszakasz 2-ed, 3-ad 5-öd, n-ed részét (ahol n tetszőleges pozitív egész szám).

Két egész szám esetében mindig meg tudtuk mondani, hogy hány egész szám van köztük.

Például 2 és 7 között a 3; 4; 5; 6, vagyis négy egész szám van.

Meg tudjuk-e tenni ezt a racionális számok esetében is?

A 4 és az 5 is racionális szám. Egész szám nincs köztük. Kérdés, hogy van-e olyan k racionális szám, amelyre fennáll, hogy $4 < k < 5$.

Ilyen van, hiszen a két szám számtani közepére igaz, hogy: $4 < \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} < 5$.

Emlékezzünk!

Két vagy több szám számtani közepe a számok összege osztva a számok számával, például 3; 4 és 5 számtani közepe: $\frac{3+4+5}{3} = 4$. Általánosan: n szám esetében:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Nézzük most meg, hogy a $\frac{9}{2}$ és az 5 közt van-e racionális szám! A két szám számtani közepére most is igaz, hogy:

$$\frac{9}{2} < \frac{\frac{9}{2} + 5}{2} = \frac{19}{4} < 5.$$

Ezt az eljárást vég nélkül folytathatjuk. Ebből világosan kitűnik, hogy a 4 és az 5 között végtelenül sok racionális szám van.

Ezt az eljárást bármely két racionális számra megismételhetjük. Ebből következik, hogy két tetszőlegesen kiválasztott racionális szám közt végtelen sok racionális szám van.

Az is látszik, hogy a racionális számok közt a számegyenesen nincsenek olyan hézagok, mint az egész számok közt.

A racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen.

Ebből azonban nem következik, hogy a számegyenes minden pontja jellemezhető racionális számokkal. A racionális számok nem fedik le hézag nélkül a számegyenest, köztük „lyukak” vannak.

A racionális számokat felírhatjuk tízes számrendszerben: 5; 18; $\frac{12}{5} = 2{,}4$.

Egy törtalakban adott racionális számot úgy alakítunk át tizedes tört alakra, hogy a számlálóját elosztjuk a nevezőjével.

Az osztás eredménye vagy *egész szám*: $\frac{8}{4} = 2$;

vagy *véges tizedes tört*: $\frac{21}{2} = 10{,}5$; $\frac{164}{100} = 1{,}64$;

vagy *végtelen szakaszos tizedes tört*: $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$; $\frac{37}{11} = 3{,}\overline{36}$.

Kérdés, hogy ha az osztás eredménye végtelen tizedes tört, akkor minden esetben szakaszos-e.

Nézzünk egy másik példát! $\frac{18}{7}$. Végezzük el az osztást!

$$
\begin{array}{l}
18 : 7 = 2{,}\overline{571428} \\
40 \\
50 \\
10 \\
30 \\
20 \\
60 \\
4
\end{array}
$$

Ennél az osztásnál minden lépés után van maradék, az osztás nem ér véget. (Szokás 0 maradékról is beszélni, ha a maradék nulla, akkor az osztás véget ér, az eredmény egész szám vagy véges tizedes tört.)

Mint látjuk, a 7-tel való osztásnál fellépő maradékok: 1; 2; 3; 4; 5 és 6. Más maradék nem léphet fel. Ezért ha az osztás nem ér véget, ugyanezek a maradékok fognak ismétlődni, mégpedig ugyanabban a sorrendben. Ezért a hányados számjegyei is szakaszosan ismétlődnek. Ez általánosan is igaz. Ha egy b számmal osztunk, legfeljebb 1; 2; 3; ... $(b-1)$ maradékot kaphatunk, ha az osztás $(b-1)$ lépés után nem ér véget, a maradékok és a hányados számjegyei szakaszosan ismétlődnek.

Valós számok

Eddigi tanulmányaink során találkoztunk már nem szakaszos végtelen tizedes törtekkel is. Bebizonyítható, hogy ezek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Ilyen végtelen tizedes törtet magunk is egyszerűen tudunk készíteni:

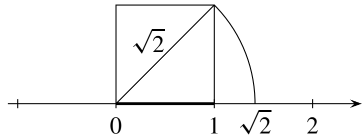
$$2{,}02002000200002\ldots$$

Ez is végtelen tizedes tört, nem szakaszos, hiszen minden kettes után eggyel több nulla van. Ugyancsak ilyen szám a nem teljes négyzetből vont négyzetgyök, a körrel kapcsolatos számításokban a π-vel jelölt szám és a szögfüggvényértékek többsége is.

Azokat a valós számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, *irracionális számoknak* nevezzük.

Ezek a számok léteznek, és helyük van a számegyenesen. Néhánynak a helyét meg is tudjuk szerkeszteni a számegyenesen.

Tudjuk, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlója $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ egység hosszúságú.



Szerkesszük meg $\sqrt{2}$ helyét a számegyenesen!

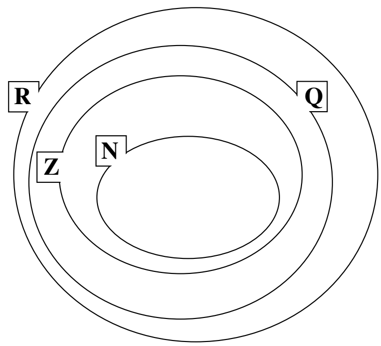
Természetesen nem mindegyik nem szakaszos tizedes tört helyét tudjuk megszerkeszteni a számegyenesen, de azért a helyük ott van. A racionális és az irracionális számok együtt hézagmentesen lefedik a számegyenes pontjait.

A racionális és az irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát. A valós számok halmazát **R***-rel jelöljük.* (Az **R** jelölés a latin reális szóból származik.)

Két irracionális számról is eldönthető (bár általában nem az általunk eddig megismert módszerekkel), hogy melyik a nagyobb. Egy racionális és egy irracionális számról is elmondható ugyanez. Ezért a valós számokra is igaz, hogy két valós számról eldönthető, melyik a nagyobb.

A valós számok halmaza is végtelen halmaz.

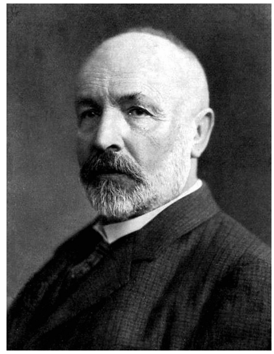
A racionális számok halmaza részhalmaza a valós számok halmazának.



Valós számokkal is végezhetünk műveleteket. Két valós szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is valós szám. *A nullával való osztást a valós számok halmazán sem értelmezzük.* A valós számokkal a későbbiek során még tovább ismerkedünk.

A halmazelmélet megalapítója

Cantor, Georg Ferdinánd (1845–1918) német matematikus. Az általunk megismert halmazelméleti alapfogalmak, az egyes számhalmazok egymáshoz való kapcsolata, a részhalmaz, a számosság fogalma stb. tőle származnak. A számok írásáról, érdekes számokról (tökéletes számok, barátságos számok stb.) többet is megtudhatsz a „Matematikatörténeti érdekességek”-ben.


Forrás: Wikipedia

Műveleti tulajdonságok

A tanult műveleti tulajdonságok érvényesek a teljes valós számkörben.

Összeadás

Ha a, b és c tetszőleges valós számok, akkor

$a + b = b + a$	az összeadás tagjai felcserélhetők, másként az összeadás *kommutatív* művelet.
$(a + b) + c = a + (b + c)$	több összeadandó esetén a tagok tetszés szerint csoportosíthatók, másként az összeadás *asszociatív* művelet.

A különbség tagjai nem cserélhetők fel és nem csoportosíthatók tetszés szerint: $(18 - 5) - 2 = 11$, de $18 - (5 - 2) = 18 - 3 = 15$; $11 \neq 15$.

Ha viszont egy számból több számot kell kivonnunk, a kivonandók sorrendje felcserélhető: *Például:* $175 - 32 - 75 - 50 = 175 - 75 - 50 - 32 = 18$.

Az összeadás és kivonás tulajdonságainak ismerete a tagok felcserélésének és csoportosításának megfelelő alkalmazásával megkönnyítheti munkánkat.

Például: $63 - 12 + 37 - 8 + 20 = 63 + 37 - 12 - 8 + 20 = 100 - 20 + 20 = 100$.

Ne felejtsük el!

Ha az összegből az egyik összeadandót kivonjuk, a másikat kapjuk: $12 + 6 = 18$; $18 - 12 = 6$; $18 - 6 = 12$.

Ha a különbséghez a kivonandót hozzáadjuk, a kisebbítendőt kapjuk: $9 - 4 = 5$; $5 + 4 = 9$.

Ezeknek az összefüggéseknek az ismerete segít eredményeink ellenőrzésében.

Szorzás

Ha a, b és c tetszőleges valós számok, akkor

$a \cdot b = b \cdot a$	a szorzat tényezői felcserélhetők (*kommutatív* művelet),
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	a szorzat tényezői tetszés szerint csoportosíthatók (*asszociatív* művelet),
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	összeget tagonként szorozhatunk (széttagolhatóság, másként *disztributivitás*).

Ez utóbbi összefüggés a különbség szorzására is igaz. Különbség szorzása úgy is elvégezhető, hogy a kisebbítendőt és a kivonandót külön-külön szorozzuk meg a szorzóval: $(16 - 5) \cdot 3 = 11 \cdot 3 = 33$ és $16 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 48 - 15 = 33$.

Az osztó és az osztandó nem cserélhető fel.

Több osztó esetén sem csoportosíthatunk tetszés szerint:
Például: $(64 : 8) : 4 = 8 : 4 = 2$; $64 : (8 : 4) = 64 : 2 = 32$.

Ha több osztás és szorzás van a feladatban és nincs zárójel, akkor a műveleteket a felírás sorrendjében kell elvégezni. Például: $64 : 8 \cdot 2 = 16$.

Ne felejtsük el!

Ha az osztót és a hányadost összeszorozzuk, az osztandót kapjuk! $28 : 7 = 4$; $4 \cdot 7 = 28$.

Az összefüggés ismerete segít eredményünk ellenőrzésében.

Ha az osztás, szorzás műveletét előjeles számokkal végezzük, vigyázzunk a következőkre:

– két azonos előjelű szám szorzata és hányadosa pozitív szám,

– két különböző előjelű szám szorzata és hányadosa negatív szám.

Fontos az is, hogy több művelet elvégzése esetén *ügyeljünk a helyes műveleti sorrendre*.

Ha a feladatban zárójel szerepel, akkor többnyire célszerű először a zárójelben szereplő műveletet elvégezni:

$$(\underbrace{48 - 2{,}3}_{45{,}7}) \cdot 1{,}7 = 45{,}7 \cdot 1{,}7 = 77{,}69.$$

Ha a zárójelen belül másik zárójel van, akkor többnyire azt a műveletet célszerű először elvégezni, amelyik a legbelső zárójelben van:

$$\underbrace{2 \cdot [\underbrace{8 : (\underbrace{2{,}7 - 0{,}7}_{2})}_{4}]}_{8} = 2 \cdot [8 : 2] = 2 \cdot 4 = 8.$$

Ha zárójel nem szabja meg a műveleti sorrendet, akkor először elvégezzük az osztásokat, a szorzásokat (ha több szorzás és osztás követi egymást, akkor a szorzást, osztást a felírás sorrendjében kell elvégezni), majd a kivonásokat és az összeadásokat:

$$\underbrace{3 \cdot 4}_{12} + 2 - \underbrace{6 : 3}_{2} + \underbrace{12 \cdot 2 : 3 \cdot 5}_{40} - 7 + \underbrace{3 \cdot 3}_{9} = 12 + 2 - 2 + 40 - 7 + 9 = 54.$$

Megjegyzés.

Ha zsebszámológéppel számolunk, feltétlenül tanulmányozzuk a számológép használati utasítását, mert a különböző gépek különböző műveleti sorrendet írhatnak elő!

Feladatok

1. Tekintsük a következő számokat!

$\frac{3}{4}$; 2; $\frac{2}{3}$; $1{,}5$; -3; 4; $\frac{1}{2}$; -5; $2{,}2$; $-\frac{2}{5}$; 0; $0{,}75$; $\frac{11}{5}$; $-3{,}5$; $\frac{12}{6}$.

a) Válasszuk ki az adott számok közül

– az egész számokat,

– a negatív számokat,

– a törtszámokat (nem a törtalakban felírt egészeket)!

b) Készítsünk halmazábrát! Ábrázoljuk a negatív számok halmazát és a törtek halmazát! Helyezzük el az adott számok közül azokat, amelyeket lehet, a halmazábrában! Mely számokat nem tudtuk elhelyezni az ábrán?

c) Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe az adott számokat!

d) Ábrázoljuk a számokat a számegyenesen!

e) Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe az adott számok abszolút értékét!

2. Ábrázoljuk a számegyenesen a következő számhalmazokat!

a) 2-nél kisebb számok halmaza ($x < 2$);

b) $-\frac{1}{2}$-nél nagyobb számok halmaza ($x > -\frac{1}{2}$);

c) -2-nél nem kisebb, $+2$-nél nem nagyobb számok halmaza ($-2 \leq x \leq +2$).

3. Végezzük el a következő műveleteket!

$12 - (+5) = \quad ; \; 12 + (-5) = \quad ; \; 12 + (+5) = \quad ; \; 12 - (-5) = \quad .$

4. Igaz-e, hogy

$7 - 9 = -9 + 7; \qquad 6 - 5 + 3 = 6 - (5 + 3); \qquad 2 - 5 + 3 = 2 + (-5 + 3);$

$3 + 6 - 1 + 8 - 2 - 1 + 8 = (3 + 6 + 8) + (-1 - 2 - 1);$

$4 + 1 - 9 - 7 + 8 + 1 - 6 = (4 + 8 + 1) - (9 + 7 + 6);$

$3 + 4 - 3 - 7 + 5 + 2 - 10 = (3 + 4 + 5 + 2) - (-3 - 7 - 10)?$

5. Végezzük el a következő műveleteket!

$16 : 4 = \quad ; \; 16 \cdot \frac{1}{4} = \quad ; \; 7 : \frac{2}{3} = \quad ; \; 7 \cdot \frac{3}{2} = \quad .$

6. Igaz-e, hogy

$6 \cdot 7 = 7 \cdot 6; \qquad 32 : 8 = 8 : 32; \qquad 32 : 8 = 32 \cdot \frac{1}{8}?$

7. Alakítsuk tizedes törtté a következő törteket!

$\frac{10}{5}; \quad \frac{12}{8}; \quad \frac{22}{16}; \quad \frac{17}{6}; \quad \frac{327}{12}; \quad \frac{80}{11}.$

8. Igaz-e, hogy

$4 \cdot 5 \cdot 6 = (4 \cdot 5) \cdot 6; \qquad (5 \cdot 6) : 3 = 5 \cdot (6 : 3); \qquad (7 \cdot 8) \cdot 9 = 7 \cdot (8 \cdot 9); \qquad (18 : 6) : 3 = 18 : (6 : 3)?$

9. Igaz-e, hogy

$(12{,}5 + 3{,}4) \cdot 7 = 12{,}5 \cdot 7 + 3{,}4 \cdot 7; \qquad \left(2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}\right) \cdot 8 = 2\frac{3}{4} \cdot 8 - 1\frac{1}{2} \cdot 8;$

$(21{,}6 + 0{,}9) : 3 = 21{,}6 : 3 + 0{,}9 : 3; \qquad \left(1\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : 5 = 1\frac{3}{4} : 5 - \frac{1}{2} : 5?$

10. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $4{,}7 - 2{,}98 + 1{,}2 - 10 - 0{,}008 = \quad ;$ *b)* $\dfrac{(-2{,}3 + 1{,}2) \cdot 10}{3{,}7} = \quad ;$

c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3{,}7 - \frac{7}{2} + 5{,}12 + \frac{11}{6} - 2{,}1 - \frac{3}{5} = \quad ;$

d) $3{,}4 + 2{,}1 : 7 - 1{,}4 + 5{,}2 \cdot 6 - 7{,}2 : 18 + 3{,}2 \cdot 3 = \quad ;$

e) $\dfrac{\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{15}\right) : 4}{12} \cdot \frac{1}{8} = \quad ;$ *f)* $\dfrac{5 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{5} : 2\right) : 4}{3} \cdot 10 = \quad ;$

g) $\dfrac{22{,}4 - 3 \cdot (2{,}5 + 0{,}6) + 8{,}8 : 3{,}2}{7{,}1} = \quad ;$ *h)* $\dfrac{11 \cdot (0{,}3 - 2{,}7)}{5{,}2} + \frac{5}{6} \cdot \left(12{,}4 + \frac{1}{2}\right) = \quad .$

11. Számítsuk ki az adott képletek helyettesítési értékét az adott értékekre!

a) $\dfrac{4a+b}{c}-d=$; $\qquad a=6{,}7;\quad b=-2{,}5;\quad c=8{,}1;\quad d=\dfrac{3}{4}.$

b) $\dfrac{3e-(f-e):g}{h}=$; $\qquad e=8{,}93;\quad f=2{,}11;\quad g=\dfrac{3}{5};\quad h=-2{,}1.$

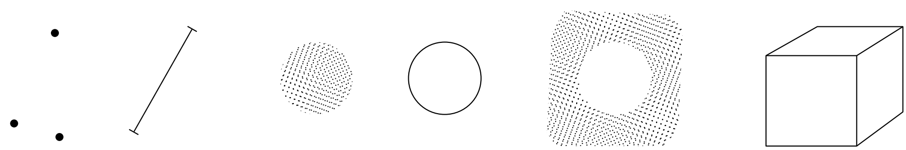
c) $\dfrac{2m+(p-1)}{n-m}:n=$; $\qquad m=8{,}3;\quad n=11{,}2;\quad p=-\dfrac{11}{5}.$

12. A betűk mely értékére lesz az alábbi képlet helyettesítési értéke nulla, illetve a betűk mely értékére nincs értelme a képletnek?

a) $\dfrac{5-k}{h}$; *b)* $\dfrac{a+b}{c}$; *c)* $\dfrac{m+n}{4-p}$; *d)* $\dfrac{6}{c-d}$; *e)* $\dfrac{u-v}{2}$; *f)* $\dfrac{r+1}{2}\cdot k$; *g)* $\dfrac{6-s}{t}:z.$

3. Ponthalmazok

A ponthalmazok elemei pontok. A tér, a sík és ezek alakzatai is ponthalmazokat alkotnak.



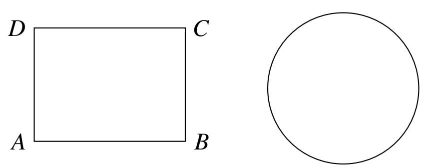
Az ábrán látható 3 pont, a szakasz és a körvonal pontjai egy-egy halmazt alkotnak. Ugyancsak halmazt alkotnak a síknak egy adott körvonalon belüli és azon kívüli pontjai is. A hasáb csúcsai, felületének pontjai, valamint a térnek azon pontjai, amelyek a hasábon belül, illetve azon kívül helyezkednek el, egy-egy ponthalmazt alkotnak.

A ponthalmazoknak is lehetnek véges számú elemei. Ilyen halmaz a három pontból álló halmaz. Az ábrán látható többi alakzat pontjai végtelen sok elemet tartalmaznak.

A ponthalmazokat is úgy kell megadni, hogy annak alapján egyértelműen eldönthető legyen, mely elemek tartoznak a halmazba, és mely elemek nem.

$P=\{A;B;C;D\}$.

Itt felsorolással adtuk meg a P halmazt, de ez a megadás is csak akkor egyértelmű, ha tudjuk, hogy mit jelöltünk a betűkkel. A ponthalmazokat is megadhatjuk egy rájuk és csak rájuk jellemző tulajdonsággal.



$P=$ {az adott téglalap csúcspontjai}, $\quad Q=$ {az adott körvonal pontjai}.

Ennek a halmaznak a pontjai nem adhatók meg felsorolással, hiszen az adott körvonalnak végtelen sok pontja van.